3 Développements mixtes

3.1 Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov (153, 206, 262, 264) [6], [10]

Théorème 3.1 (Perron-Frobenius)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et irréductible. On a alors :

1. $\rho(A) > 0$,
2. $\rho(A) \in \mathrm{Sp}(A)$, et ses multiplicités algébrique et géométrique sont égales à 1. On dit que $\rho(A)$ est une valeur propre *simple*.
3. Il existe un vecteur propre x strictement positif associé à $\rho(A)$.
4. Si A est strictement positive, alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A ayant pour module $\rho(A)$.

Démonstration. J'effectuerai la preuve en 4 étapes (et sans le théorème marteau pour écraser une mouche de point fixe de Brouwer !) :

1. Prouver le théorème pour A strictement positive.
2. Prouver une version faible dans le cas où A est seulement positive
3. Montrer l'équivalence suivante :

$$(A \text{ positive est irréductible}) \iff \left((I_n + A)^{n-1} \text{ est strictement positive}\right).$$

4. Appliquer l'étape 1 à $(I_n + A)^{n-1}$ et l'étape 2 à $I_n + A$ et à A pour obtenir le résultat.

□

Une application bien connue est celle-ci :

Proposition 3.2. Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène et irréductible sur un espace d'états fini $E := \{x_n, \dots, x_n\}$ et soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de transition associée à cette chaîne. Alors on a :

1. Il existe une unique mesure de probabilité μ sur E invariante pour la dynamique issue de P. De plus cette mesure charge tous les éléments de E.
2. Si, de plus, la chaîne (X_n) est *apériodique*, alors :

$$\lim_{k \to +\infty} P^k = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$$

où on a représenté μ par le vecteur ligne suivant :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu(\{x_1\}) & \dots & \mu(\{x_n\}) \end{pmatrix}.$$

En particulier, quelle que soit la loi de X_0, en notant μ_k la loi de X_k, on a :

$$\|\mu_k - \mu\|_\infty \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Démonstration. On utilisera, au cours de la preuve, certains lemmes intermédiaires qui ne seront pas démontrés. Il vous sera sans doute nécessaire de les mettre dans vos plans.

Lemme 3.3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive.

1. Les encadrements suivants sont vérifiés :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right),$$

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right).$$

2. S'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ strictement positif et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\alpha x \leq Ax \leq \beta x \quad (\text{resp. } \alpha x < Ax < \beta x)$$

alors :

$$\alpha \leq \rho(A) \leq \beta. \quad (\text{resp. } \alpha < \rho(A) < \beta)$$

3. ρ est une application continue.

Étape 1 : Cas où A est strictement positive :

Lemme 3.4. Si $x \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors $|x|$ est un vecteur propre associé à $\rho(A)$. De plus, $|x|$ est strictement positif et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta}|x|$.

Démonstration. Étant donné que A est strictement positive, on a :

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \leq \rho(A)$$

(la deuxième inégalité vient du lemme 3.3). Donc, on a déjà que $\rho(A) > 0$. De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est tel que $|\lambda| = \rho(A)$, alors, en prenant x un vecteur propre associé, on a :

$$\rho(A)|x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|.$$

Notons alors :

$$y = A|x| - \rho(A)|x|.$$

Supposons par l'absurde $y \neq 0$. On a alors :

$$Ay > 0. \text{ (car } A > 0)$$

ce qui entraîne :

$$\rho(A)(A|x|) < A(A|x|)$$

et donc par le deuxième point du lemme 3.3 (qu'il est légitime d'appliquer car le vecteur $A|x|$ est strictement positif) :

$$\rho(A) < \rho(A). \quad \textbf{ABSURDE !}$$

Donc $|x|$ est un vecteur propre associé à $\rho(A)$. De plus, en remarquant que :

$$|x| = \frac{1}{\rho(A)} \underbrace{A|x|}_{>0}$$

on a que $|x| > 0$. De plus :

$$A|x| = \rho(A)|x| = |\lambda x| = |Ax|,$$

c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \,.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\theta_i \in (-\pi, \pi]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad a_{ij}x_j = e^{i\theta_i} a_{ij}|x_j|.$$

En prenant $\theta = \theta_1$ et en simplifiant par a_{1j} des deux côtés de l'égalité (on peut le faire car $A > 0$), on a :

$$x = e^{i\theta}|x|.$$

$\square$

De ce lemme découlent les faits suivants :

1. $\rho(A)$ est valeur propre de A et $\rho(A) > 0$.
2. Tout vecteur $x \in E_{\rho(A)}(A) \setminus \{0\}$ n'a aucune composante nulle (prendre $\lambda = \rho(A)$ dans le lemme précédent).

Montrons alors que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de module maximal. Si x est un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors on a :

$$\lambda x = Ax = A\left(e^{i\theta}|x|\right) = e^{i\theta}\rho(A)|x| = \rho(A)x.$$

Ainsi, étant donné que $x \neq 0$, $\lambda = \rho(A)$. Pour finir, montrons que $\rho(A)$ est de multiplicités algébrique et géométrique égales à 1.

— Supposons qu'il existe $x, y \in E_{\rho(A)}(A)$ linéairement indépendants. Alors, en notant :

$$z = x_1 y - y_1 x,$$

on a :

— $z_1 = 0$

— $z \in E_{\rho(A)}(A) \setminus \{0\}$ étant donné que x et y sont linéairement indépendants.

CONTRADICTION ! Donc $\dim E_{\rho(A)}(A) = 1$ et on peut écrire :

$$E_{\rho(A)}(A) = \mathrm{Vect}(x)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ strictement positif. Maintenant, si $\rho(A)$ est de multiplicité algébrique $m \geq 2$, alors il existe $y \in \mathbb{C}^n$ linéairement indépendant de x tel que :

$$Ay = x + \rho(A)y \quad (\rho(A) \text{ est associé à un bloc de Jordan non trivial}).$$

En posant $z = \frac{1}{2}(y + \overline{y}) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$Az = x + \rho(A)z.$$

Maintenant, étant donné que $x > 0$, prenons $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$v := z + \alpha x > 0.$$

On a alors :

$$Av = Az + \alpha Ax = x + \rho(A)z + \alpha\rho(A)x = x + \rho(A)v > \rho(A)v.$$

Ainsi, par le deuxième point du lemme 3.3, on obtient :

$$\rho(A) < \rho(A) \quad \textbf{ABSURDE ! (encore)}$$

Donc, $\rho(A)$ est de multiplicité algébrique égale à 1. Cela termine la preuve ! Du moins pour A strictement positive...

Étape 2 : version faible pour A positive seulement.
Le but est de prouver que, pour A positive seulement, $\rho(A)$ est valeur propre de A et qu'il existe un vecteur propre positif associé. Pour le montrer, considérons l'ensemble :

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \ \|x\|_1 = 1\}.$$

Cet ensemble est compact et, si A est strictement positive, alors il existe un unique vecteur propre positif pour la valeur propre $\rho(A)$ dans K_1. Maintenant, prenons A positive et considérons, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A_k = \left(a_{ij} + \frac{1}{k}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

A_k est donc une matrice strictement positive pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Le théorème de Perron-Frobenius assure donc que $\rho(A_k)$ est valeur propre de A_k et qu'il existe un unique vecteur propre v_k strictement positif dans le compact K_1. On peut donc trouver une extractrice φ et un vecteur $v \in K_1$ tels que :

$$v_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} v.$$

Or, on a également :

$$A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$$

et

$$A_k v_k = \rho(A_k) v_k.$$

Ainsi, par continuité de ρ et du produit matriciel, on a :

$$Av = \lim_{k \to +\infty} A_{\varphi(k)} v_{\varphi(k)} = \lim_{k \to +\infty} \rho\left(A_{\varphi(k)}\right) v_{\varphi(k)} = \rho(A) v.$$

Ainsi, $\rho(A)$ est valeur propre de A et il existe un vecteur propre positif associé (ici v).

Étape 3 : l'équivalence qui change tout :
Rappelons la définition d'une matrice irréductible :

Définition 3.5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et notons, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k =: \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On dit que A est irréductible si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, \ \exists m \in [\![1, n-1]\!], \quad a_{ij}^{(m)} > 0.$$

Il faut bien avoir en tête l'interprétation de cette définition en termes de graphes. Si on a un graphe orienté à n sommets à poids positifs, et qu'on note A la matrice des poids de ce graphe, A est irréductible si et seulement si de tout sommet du graphe, on peut accéder aux autres sommets du graphe en un nombre fini d'étapes (forcément plus petit que $n-1$).

$\Rightarrow$: Si A est positive et irréductible, alors, en notant :

$$(I_n + A)^{n-1} = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n},$$

on a :

$$c_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{ii}^{(k)} \geq 1 > 0,$$

et, pour $i \neq j$, en prenant $m \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a_{ij}^{(m)} > 0$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{ij}^{(k)} \geq \binom{n-1}{m} a_{ij}^{(m)} > 0.$$

Ainsi, la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.

$\Leftarrow$: Si $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive avec A positive, alors en prenant $i \neq j$ avec $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{ij}^{(k)} > 0.$$

Il s'agit donc d'une somme de termes positifs donnant un résultat strictement positif. Ainsi, il existe un terme strictement positif, c'est-à-dire qu'il existe $m \in [\![1, n-1]\!]$ tel que :

$$a_{ij}^{(m)} > 0.$$

Ainsi, A est irréductible.

Étape 4 : Le grand final

On a déjà que, étant donné que A est irréductible, A n'a aucune ligne nulle (faire un dessin : cela correspondrait à un sommet qui ne mènerait à aucun autre sommet dans le graphe). Ainsi, comme pour le cas strictement positif, on a :

$$0 < \min_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \leq \rho(A).$$

De plus, A est positive, donc $\rho(A)$ est valeur propre de A. Pour terminer, nous aurons besoin d'un dernier lemme :

Lemme 3.6. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est positive alors :

1. $\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A)$,
2. S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k soit strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A.

Démonstration. 1. On sait que :

$$\mathrm{Sp}(I_n + A) = 1 + \mathrm{Sp}(A).$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire permet de dire :

$$\rho(I_n + A) \leq 1 + \rho(A).$$

De plus, comme A est positive, $\rho(A)$ est valeur propre de A d'après l'étape 2, donc $1 + \rho(A) > 0$ est valeur propre de $I_n + A$. Donc :

$$1 + \rho(A) \leq \rho(I_n + A).$$

D'où l'égalité.

2. Si A est positive, alors $\rho(A)$ est valeur propre de A. Notons m sa multiplicité algébrique. En la trigonalisant sur $\mathbb{C}$, on a :

$$A = PTP^{-1}$$

avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T ayant pour diagonale :

$$(\rho(A), \ldots, \rho(A), \lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n)\,.$$

Ainsi, on a :

$$A^k = PT^kP^{-1}$$

avec T^k ayant pour diagonale :

$$\left(\rho(A)^k, \ldots, \rho(A)^k, \lambda_{m+1}^k, \ldots \lambda_n^k\right).$$

Or, A^k est strictement positive. Ainsi, par le théorème de Perron-Frobenius, la valeur propre $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ de A^k est simple. Or, sa multiplicité est supérieure ou égale à m. Donc $m = 1$. $\rho(A)$ est donc valeur propre simple de A.

□

À partir de là, étant donné que A est irréductible, la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive, et, étant donné que $I_n + A$ est déjà positive, le résultat du lemme s'applique : $1 + \rho(A)$ est une valeur propre simple de $I_n + A$. Or, elle a même multiplicité que la valeur propre $\rho(A)$ de A. Donc $\rho(A)$ est valeur propre simple de A. De plus, étant donné que A est positive, il existe un vecteur propre x positif associé à $\rho(A)$. On a alors :

$$(I_n + A)^{n-1}x = (1 + \rho(A))^{n-1}\,x.$$

Or, $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive et x est positif non-nul. Donc :

$$(1 + \rho(A))^{n-1}\,x = (I_n + A)^{n-1}x > 0$$

et donc :

$$x > 0.$$

Cela termine la preuve ! □

Examinons désormais la preuve de la proposition 3.2 :

Démonstration. 1. Montrons que $\rho(P) = 1$. P est une matrice stochastique, c'est-à-dire que P est positive et on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.3, $\rho(A) = 1$. De plus, P est irréductible, donc P^T l'est aussi. En appliquant le théorème de Perron-Frobenius à P^T, on a que 1 est valeur propre simple de P^T et que l'espace propre $E_1\left(P^T\right)$ est engendré par un vecteur strictement positif x. Notons :

$$z = \frac{1}{\|x\|_1}x.$$

z est l'unique élément de $E_1\left(P^T\right)\cap K_1$. En notant alors :

$$\mu = z^T,$$

on a que μ est strictement positif et que la somme de ses coefficients vaut 1. μ est donc l'unique mesure de probabilité sur E vérifiant :

$$\mu P = \mu.$$

De plus, μ étant strictement positif, cela signifie que tous les points de E sont chargés par cette mesure.

2. Rappelons la définition de la période d'une matrice positive irréductible :

Définition 3.7. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et $i \in [\![1, n]\!]$. L'entier :

$$h_i := \text{pgcd}\left(\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; p_{ii}^{(k)} > 0\right\}\right)$$

est appelé *période* de l'indice i. Si A est irréductible, cet entier ne dépend pas de i et est appelé *période* de A. On dit alors, dans ce cas, que A est *apériodique* si cet entier vaut 1.

On peut alors montrer la propriété suivante (voir [10]) :

Proposition 3.8. Si A est une matrice positive, irréductible et apériodique, alors :

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq k_0 \quad A^k > 0.$$

Idée de la preuve. (a) On pose :

$$S(i) = \left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; p_{ii}^{(k)} > 0\right\},$$

et on vérifie par l'identité de Bézout que cet ensemble possède deux entiers consécutifs, $k(i)$ et $k(i)+1$.

(b) On montre que si $n \geq k(i)^2$, alors :

$$p_{ii}^{(k)} > 0.$$

En prenant alors $k_1 = \max\limits_{1\leq i\leq n} k(i)^2$, alors :

$$\forall k \geq k_1,\ \forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_{ii}^{(n)} > 0.$$

(c) Enfin, puisque A est irréductible, si $i \neq j$, on sait qu'il existe k_{ij} tel que :

$$p_{ij}^{(k_{ij})} > 0.$$

En prenant alors $k_0 = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} (k_{ij} + k_1)$, on a :

$$\forall k \geq k_0,\ \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad p_{ij}^{(k)} \geq p_{ij}^{(k_{ij})} p_{ii}^{(k_1)} > 0.$$

□

On montre alors que 1 est l'unique valeur propre de P de module maximal. En effet, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P)$ est telle que $|\lambda| = 1$, alors λ^{n_0} est valeur propre de P^{n_0} de module 1. Donc, par le théorème de Perron-Frobenius point 4, $\lambda^{n_0} = 1 = \rho\left(A^{n_0}\right)$. Supposons par l'absurde $\lambda \neq 1$. On a alors :

$$\exists x, y \in \mathbb{C}^n, \quad Px = x,\ Py = \lambda y.$$

Et donc x et y sont linéairement indépendants. On aurait alors :

$$P^{n_0}x = x,\ P^{n_0}y = \lambda^{n_0}y = y$$

et donc $x, y \in E_1(P^{n_0})$. Or, cet espace est de dimension 1 d'après le théorème de Perron-Frobenius. **CONTRADICTION !** Donc $\lambda = 1$.

Il ne reste plus qu'à montrer la convergence. On note :

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

de sorte que $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et :

$$L := \mathbf{1}\mu \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

L est alors la matrice de la projection sur $E_1(P)$ parallèlement à l'hyperplan $\ker \mu$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

(a) $L^k = L$,

(b) $P^k L = LP^k = L$,

(c) $(P-L)^k = P^k - L$.

En effet, étant donné que :

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

et :

$$\mu P = \mu,$$

on a :

$$P^k L = \left(P^k \mathbf{1}\right)\mu = \mathbf{1}\mu = L,$$
$$LP^k = \mathbf{1}\left(\mu P^k\right) = \mathbf{1}\mu = L.$$

Enfin, puisque P et L commutent, on a :

$$(P-L)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P^i L^{k-i} = P^k + \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^{k-i}}_{=-1} \right) L = P^k - L.$$

Ainsi, pour montrer la convergence de P^k vers L, il suffit de montrer que $\rho(P-L) < 1$. Prenons donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P-L) \setminus \{0\}$ et $z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On observe que :

$$L(\lambda z) = L(P-L)z = (LP - L^2)z = 0.$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\lambda z = Pz - Lz = Pz.$$

Donc λ est aussi valeur propre de P avec z comme vecteur propre associé. Ainsi :

$$|\lambda| \leq \rho(P) = 1.$$

Si on avait $|\lambda| = 1$, alors on aurait $\lambda = 1$ car 1 est l'unique valeur propre de P de module maximal. Ce qui entraînerait :

$$z \in E_1(P) = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = \alpha\mathbf{1}$. On a alors :

$$z = (P - L)z = (P - L)\alpha\mathbf{1} = 0$$

car $L\mathbf{1} = P\mathbf{1} = \mathbf{1}$. **CONTRADICTION !** On a donc :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P - L), \quad |\lambda| < 1.$$

Donc :

$$\rho(P - L) < 1.$$

Et finalement :

$$P^k - L = (P - L)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

$\square$

Remarque 3.1.1 (Et si P n'est pas apériodique ?)**.** *Si P n'est pas périodique, on n'a pas le résultat ci-dessus. Un contre-exemple est :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P est bien stochastique et irréductible, mais n'est clairement pas apériodique car :

$$P^2 = I_2.$$

On ne peut donc pas avoir convergence vers la mesure invariante :

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cependant, un résultat qui reste vrai est que, si P est stochastique irréductible, alors l'ensemble des valeurs propres de P de module 1 est un groupe de racines d-ièmes de l'unité, où d est la période de P, et toutes ces valeurs propres sont simples. On a alors le résultat suivant :

$$\left(\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P^k\right) P^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$$

Pour notre exemple précédent, on a :

$$\frac{1}{2}(I_2 + P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2}(I_2 + P)P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on a donc bien convergence vers la mesure invariante.